第五节 广义积分

一、无穷区间上的广义积分

二、无界函数的广义积分

$$\text{前面所讲的定积分是常义积分}\begin{cases}\text{积分区间有限}\\\text{被积函数有界}\end{cases}$$

$$\Downarrow \text{推广}$$

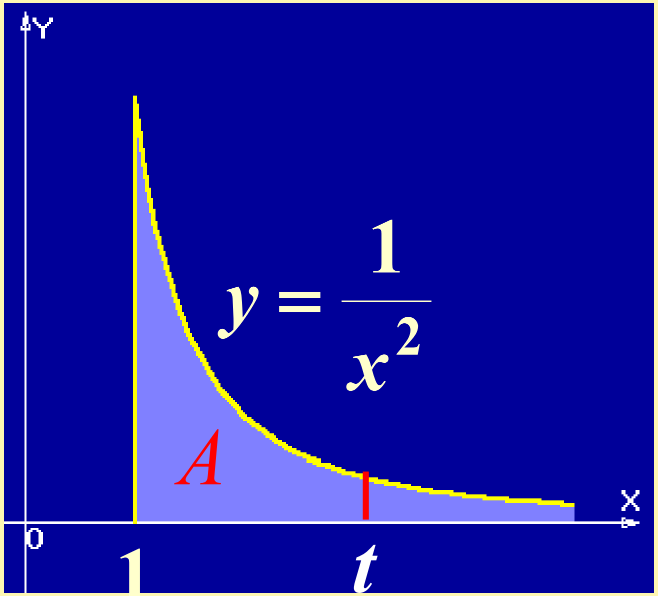
$$\text{广义积分}\begin{cases}\text{积分区间为无穷区间}\\\text{被积函数无界}\end{cases}$$

一、无穷区间上的广义积分

引例 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口

曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$

问：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=?$

定义1 设$f(x)\in C[a,+\infty)$,

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在,

则称此极限为$f(x)$在$[a,+\infty)$的广义积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛；如果上述极限不存在,

就称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

类似地，若$f(x)\in C(-\infty,b]$，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在, 就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 。

无穷区间的广义积分也称为第一类广义积分。

说明: (1)上述定义中若出现 $\infty-\infty$,并非不定型 ,

它表明该广义积分发散 。

(2) 一般来说 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \neq \lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x$

柯西主值意义下的广义积分

例如 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$,

由于 $\int_{a}^{+\infty} x\mathrm{d}x = +\infty$ 发散，故：$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散.

但 $\int_{-a}^{a} x\mathrm{d}x = 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} x\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to+\infty} 0 = 0$

注意：对广义积分, 只有在收敛的条件下才能使用“奇零偶倍” 的性质， 否则会出现错误.

★无穷区间上的广义积分的计算

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\left[F(x)\right]_a^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\big(F(t)-F(a)\big)=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

有类似牛顿—莱布尼兹公式的计算表达式

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{\pi}{2}\quad=1$$

例2. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]\mathrm{d}x$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\quad=\frac{1}{2}$$

注： 分部积分公式也适用于无穷区间的广义积分

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du$$

例3 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$ ($p > 0$,是常数)

解：$$\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{p} de^{-pt}$$

$$= [-\frac{t}{p} e^{-pt}]_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}[e^{-pt}]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} - 0 - \frac{1}{p^2}(0-1) = \frac{1}{p^2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{pt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{pe^{pt}} = 0$$

★ 例4. 证明 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \,(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；

$p \le 1$ 时发散.

证明: 当 $p=1$ 时 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \Big[\ln|x|\Big]_a^{+\infty} = +\infty$

当 $p \ne 1$ 时 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} - \frac{a^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 广义积分收敛, 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p \le 1$ 时, 积分发散.

二、无界函数的广义积分(瑕积分)

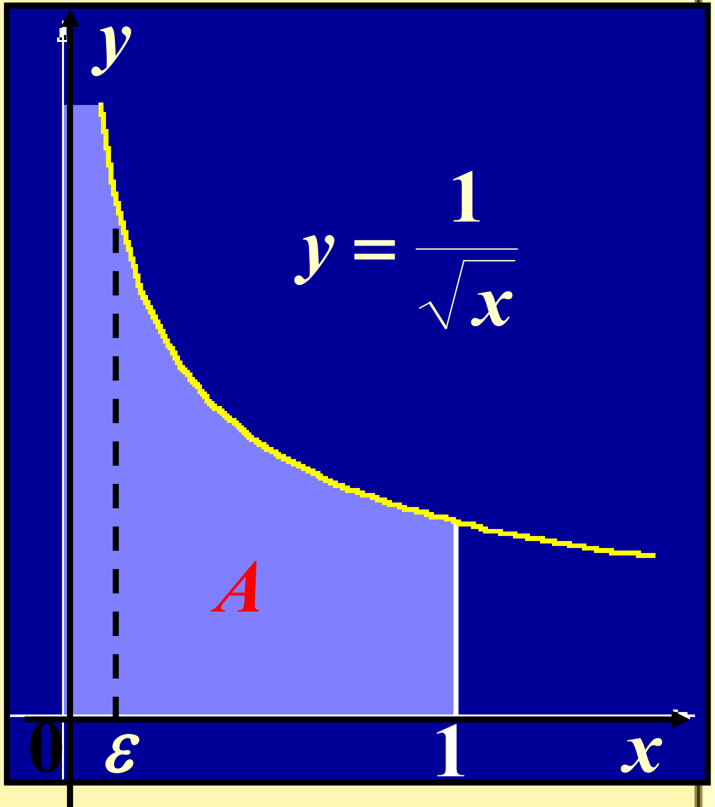
引例　曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$



如果函数$f(x)$在点a的任一邻域内都无界，则点a为函数$f(x)$的瑕点。

问：$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}=?$

有限区间、无界函数的广义积分又叫做**瑕积分**。

定义2 设 $f(x)\in C(a,b]$，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，

若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，

则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，

就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

类似地，若 $f(x)\in C[a,b)$，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点，

则定义 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，

点 c 为 $f(x)$ 瑕点，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类广义积分。

说明：若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是广义积分。

如：设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

瑕积分计算　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，

若 a 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to a^+}[F(x)]_t^b$

$$= F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t) \quad = F(b) - F(a^+) = F(x)\Big|_{a^+}^{b}$$

若 b 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 a，b 都为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$

若瑕点 $c\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

$$= F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

$$\neq F(b) - F(a)$$

例5. 计算$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

解： $x = 1$ 为瑕点.

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{2/3}}$$

$$= [3(x-1)^{1/3}]_0^{1^-} + [3(x-1)^{1/3}]_{1^+}^2 = 3(1-0)+3(0+1)=6$$

说明：如果有人这样做：

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = [3(x-1)^{1/3}]_0^2 = 3[1-(-1)] = 6 \quad \times$$

结果虽然对，但方法不对。

例如：$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = [-\frac{1}{x}]_{-1}^1 = -2$ 而$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$发散，

过程是错的, 结果也是错的。

★ 例6. 证明广义积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ $(a>0)$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\ge 1$时发散.

证明: $x=0$为瑕点

当$q=1$时, $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{0^+}^{a} = +\infty$

当 $q\ne 1$ 时 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_{0^+}^{a}$

$$= \frac{a^{1-q}}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{t\to 0^+} t^{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$